Algèbre linéaire pour GC-SIE-SC | 18 septembre 2025
X. Morvan | EPFL

Série 2 (Corrigé)

Cette série fait suite aux chapitres 1.1 Systèmes d'équations linéaires.

Mots-clés : *Gauss-Jordan, formes échelonnées, formes écheonnées-réduites*

Cette collection d'exercices est longue, pour vous permettre de vous exercer plus. Nous n'attendons pas de vous que vous puissiez les terminer tous en deux heures, mais elle vous permettra de vous entraîner en calculs.

Remarques :

1. il existe plusieurs méthodes possibles pour résoudre certains exercices. Parfois le corrigé donne aussi une méthode alternative, méthode que nous verrons plus tard dans le cours ;
2. il peut arriver que certaines questions soient reliées au cours du jeudi.

Exercice 1

i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.

ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

a) $\left\{\begin{array}{rcrcr} x_1 & - & 2x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & = & 3 \end{array}\right.$

b) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 12 \\ x_3 & + & 2x_1 & - & 4x_2 & = & -1 \\ x_2 & + & 2x_3 & - & 4x_1 & = & -8 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 11 \\ -3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \end{array}\right.$

d) $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & - & 3x_2 & & & = & 5 \\ 5x_3 & - & x_1 & + & x_2 & = & 2 \\ x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \end{array}\right.$

Sol.:

a) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

b) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

c) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 2 & 11 \\ -3 & 2 & -1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

d) Matrice augmentée : $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

Forme échelonnée réduite : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, Solution : $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Exercice 2

a) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.

b) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Sol.: A : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, infinité de solutions (x_3 est une variable libre),

B : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, pas de solution,

C : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, pas de solution.

Exercice 3

a) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.

b) Identifier les variables de bases (ou principales) et les variables libres.

c) Déterminer si les systèmes linéaires correspondant possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sol.:

A) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2, x_3. Variables libres : aucune. Solution unique.

B) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2. Variable libre : x_3. Infinité de solutions.

C) forme échelonnée, forme échelonnée réduite. Variables principales : x_1, x_2. Variable libre : x_3. Pas de solution.

D) forme échelonnée, pas une forme échelonnée réduite. Variables principales : x_2, x_3. Variable libre : x_1. Infinité de solutions.

E) pas une forme échelonnée. Infinité de solutions.

Exercice 4

Pour chacun des systèmes suivants :

i) Écrire la matrice augmentée.

ii) Transformer la matrice augmentée sous forme échelonnée réduite.

iii) Identifier les variables de bases et les variables libres, et écrire la solution générale.

a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ 4x_1 - 3x_2 = 6 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_3 = 2 \\ x_4 = -1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2 \end{cases}$

Sol.:

a) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 4 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1 et x_2. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

b) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_2, x_3. Pas de variable libre. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & -1 \\ x_2 & = & 1 \\ x_3 & = & 1 \end{cases}$$

c) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Déjà sous forme échelonnée réduite. Variables de bases : x_1, x_3, x_4. Variable libre : x_2. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - 2x_2 \\ x_3 & = & 2 \\ x_4 & = & -1 \end{cases}$$

d) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Pas de solution. Théoriquement, variable de base : x_1, variables libres : x_2, x_3.

e) Matrice augmentée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Variables de bases : x_1, x_4, x_5. Variables libres : x_2, x_3. Solution générale :

$$\begin{cases} x_1 & = & 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 & = & 2 \\ x_5 & = & -1 \end{cases}$$

Exercice 5

Laquelle des colonnes de la matrice suivante n'est pas une colonne-pivot ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

☐ la première,
☐ la deuxième,
☐ la troisième,
☐ la quatrième.

Sol.: Dans cet exercice à choix multiple il s'agit encore une fois d'effectuer des opérations sur les lignes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\text{L2}\leftrightarrow\text{L1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-\text{L1} \\ \text{L4}-\text{L1}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \underset{\sim}{\substack{\text{L3}-2\text{L2} \\ \text{L4}-2\text{L2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

On voit donc que c'est la troisième colonne qui ne contient pas de pivot. Remarquons qu'il y a des choix plus économiques pour échelonner et réduire cette matrice, si on avait voulu résoudre le système associé (ce qui n'est pas le cas).

Exercice 6

Soit $a \in \mathbb{R}$. A l'aide de l'algorithme de réduction (ou de Gauss-Jordan), déterminer les valeurs du paramètre a pour lesquelles le système

$$\begin{cases} ax + (1-a)y + (1-a)z &= a^2 \\ ax + (1+a)y + (1+a)z &= a - a^2 \\ x + y + z &= 1 - a \end{cases}$$

a) n'admet aucune solution,
b) admet une infinité de solutions,
c) admet une solution unique.

Ensuite résoudre le système dans les cas b) et c).

Sol.: On écrit la matrice augmentée du système, en échangeant la première et la dernière ligne

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ a & 1-a & 1-a & a^2 \\ a & 1+a & 1+a & a-a^2 \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}-a\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}-a\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \widetilde{\text{L2}\leftrightarrow\text{L3}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-2a & 1-2a & 2a^2-a \end{array}\right) \text{L1}\to\text{L1}-\text{L2}\widetilde{\text{L3}\to\text{L3}-(1-2a)}\text{L2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1-a \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2-a \end{array}\right)$$

La matrice est maintenant échelonnée et réduite. On distingue les cas :

- Si $a \neq 0$ et $a \neq 1/2$, le nombre $2a^2 - a$ est non nul. La dernière équation ne peut être vérifiée et le système ne possède pas de solutions. On écrit alors $S = \emptyset$ pour dire que l'ensemble des solutions est vide.

- Si $a = 0$ ou $a = 1/2$, la dernière équation donne $0 = 0$. Il reste alors deux équations à trois inconnues. On a ainsi une infinité de solutions paramètrées par $z \in \mathbb{R}$. On a toujours $x = 1 - a$ et $y = -z$. On choisit z comme inconnue libre, c'est-à-dire comme paramètre et on obtient :
$$S = \{(1-a; -z; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$$
Le système possède une droite entière de solutions.

Exercice 7

Trouver la solution générale du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y \qquad - 2u = 0 \\ x - \ y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$$

Sol.: La réduction de Gauss–Jordan de la matrice augmentée du système nous donne

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & -5 & 0 \end{array}\right) \underset{\substack{L_3 \to L_3 - 4L_1 \\ L_4 \to L_4 - L_1}}{\widetilde{L_2 \to L_2 - 4L_1}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & -18 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -9 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Le système associé s'écrit

$$\begin{cases} x \quad - \ z - 2u = 0 \\ \quad y + 2z + 3u = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \quad z + 2u \\ y = -2z - 3u \end{cases} \qquad \text{avec } z \text{ et } u \text{ quelconques.}$$

Ainsi, la solution générale dépend de deux paramètres :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } s, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 8

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

V F

a) Un système d'équations linéaires avec trois équations à 5 inconnues admet au moins une solution. ☐ ☐

b) Un système d'équations linéaires avec cinq équations à 3 inconnues n'admet aucune solution. ☐ ☐

c) L'équation $\sqrt{2}x + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐

d) L'équation $2\sqrt{x} + \pi y - z = 1$ est une équation linéaire à trois inconnues. ☐ ☐

e) L'équation $\cos x = 0$ est une équation linéaire à une inconnue. ☐ ☐

f) L'équation $x = 1$ est une équation linéaire à une inconnue, les équations $y = -1$ et $z = 5$ également, mais le système d'équations

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = -1 \\ z & = 5 \end{cases}$$

est un système linéaire de trois équations à trois inconnues. ☐ ☐

Sol.:

a) C'est faux. Considérons par exemple les trois équations $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0$, $x_1 = 0$ et $x_1 = 1$. Le système formé de ces trois équations à 5 inconnues n'a visiblement aucune solution.

b) C'est également faux. Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

Ce système *homogène* admet la solution nulle $x = y = z = 0$.

c) C'est vrai.

d) C'est faux. La présence de la racine carrée d'une inconnue n'est pas autorisée dans une équation linéaire.

e) C'est faux. La présence du cosinus d'une inconnue n'est pas autorisée.

f) C'est vrai. Ce qu'illustre cet exemple c'est qu'il n'est pas nécessaire que chaque inconnue apparaisse dans chaque équation du système.

Exercice 9

Le système linéaire suivant où a est un paramètre réel

$$\begin{cases} 2x + 2y + 2z &= 1 \\ 2y + 2z &= 1 - 2a \\ 2x + 4ay + 2z &= 1 \\ 4x + 4ay + 2z &= 1 + 2a \end{cases}$$

☐ possède une solution unique lorsque $a = 1/2$

☐ ne possède aucune solution lorsque $a \neq 1/2$

☐ possède une infinité de solutions lorsque $a = 1/2$

☐ ne possède aucune solution lorsque $a = 1/2$

Sol.: On écrit la matrice augmentée et on travaille :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 2 & 4a & 2 & 1 \\ 4 & 4a & 2 & 1+2a \end{array}\right) \underset{\text{L4}\to\text{L4}+(-2)\cdot\text{L1}}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+(-1)\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 4a-2 & 0 & 0 \\ 0 & 4a-4 & -2 & 2a-1 \end{array}\right) \underset{\text{L4}\to\text{L4}+(-2a)\cdot\text{L2}}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+(-2a)\cdot\text{L2}}{\sim}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & -2 & -4a & -2a+4a^2 \\ 0 & -4 & -2-4a & 4a^2-1 \end{array}\right) \underset{\text{L4}\to\text{L4}+2\cdot\text{L2}}{\overset{\text{L3}\to\text{L3}+\text{L2}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1-2a \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \\ 0 & 0 & 2(1-2a) & (1-2a)^2 \end{array}\right)$$

On distingue alors deux cas :

- Si $(1-2a)=0$, c'est-à-dire $a=\frac{1}{2}$, alors on a les équations : $2x+2y+2z=1$ ainsi que $2y+2z=0$, ce qui donne les solutions $x=\frac{1}{2}$, $y=-z$ (infinité de solutions paramètrées par $z\in\mathbb{R}$).
- Si $(1-2a)\neq 0$, alors la dernière équation donne $z=\frac{1-2a}{2}$. On trouve ensuite $y=0$ et, finalement, $x=a$. Dans ce cas, le système possède une seule solution.

Deux remarques :

1. Lors d'un examen il n'est pas nécessaire de trouver les solutions explicitement. Il suffit de se rendre compte que la matrice augmentée du système sous sa forme échelonnée ne contient aucune ligne dont le pivot se trouve dans la colonne des termes de droites (les b_i) pour conclure le système a toujours au moins une solution (ce qui élimine les réponses 2 et 4).
2. Dans ce cas, il a été judicieux de ne pas diviser la première ligne de la matrice par deux, ce qui aurait fait apparaître des fractions et aurait rendu les calculs plus dur.

Exercice 10

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

a) $\begin{cases} 2x_1 & - & 5x_2+ & 8x_3 = & 0 \\ -2x_1 & - & 7x_2+ & x_3 = & 0 \\ 4x_1 & + & 2x_2+ & 7x_3 = & 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x_1 & - & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 0 \\ -2x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -7x_1 & + & 37x_2 & + & 119x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 19x_2 & + & 57x_3 & = & 0 \end{cases}$

Sol.:

a) La matrice des coefficients est carrée (autant d'équations que d'inconnues) et on peut remarquer que $L_1=L_2+L_3$. Il s'agit d'une relation de dépendance linéaire sur les lignes. On obtiendra une ligne de zéros dans la matrice, et il n'y aura pas trois pivots. On a alors au moins une variable libre et donc une infinité de solutions (non-triviales).

   On peut aussi résoudre le système. La forme échelonnée réduite de la matrice augmentée est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{8} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Sa solution générale est
$$\begin{cases} x_1 & = & -\frac{17}{8}x_3 \\ x_2 & = & \frac{3}{4}x_3 \end{cases}.$$
   Il existe une infinité de solutions non triviales (prendre $x_3\neq 0$).

b) Forme échelonnée réduite de la matrice augmentée :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
   Solution triviale ($x_1=x_2=x_3=0$).

c) Le système a moins d'équations (deux) que d'inconnues (trois), il ne peut pas y avoir trois pivots. Le système est compatible (on échelonne pour le voir), donc il existe une infinité de solutions.

Exercice 11

a) Résoudre le système suivant en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée correspondante :

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 12, \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 &= -1, \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 &= -8. \end{aligned} \tag{1}$$

b) Mettre la matrice suivante sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sol.:

a) A partir de la matrice augmentée du système linéaire, on obtient par des opérations élémentaires :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 12 \\ 2 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim_{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 & 12 \\ -4 & 1 & 2 & -8 \end{bmatrix} \sim_{\substack{L_2 - 3/2L_1 \\ L_3 + 2L_1}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5/2 & 27/2 \\ 0 & -7 & 4 & -10 \end{bmatrix} \sim_{L_3 + 7/8L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 29/16 & 29/16 \end{bmatrix} \sim^{L_3 \cdot 16/29} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 8 & -5/2 & 27/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim_{\substack{L_1 - L_3 \\ L_2 + 5/2L_3}} \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim_{\substack{L_1 + 1/2L_2 \\ L_2 \cdot 1/8}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1 \cdot 1/2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

La solution du système est donc donnée par

$$x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$$

b) Pensez à bien écrire quelles sont les opérations que vous faites à chaque étape !

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix} \sim_{\substack{-L_2 + 3L_1 \\ -L_3 + 5L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 8 & 16 & 34 \end{bmatrix} \sim_{\substack{L_2 \cdot 1/4 \\ L_3 \cdot 1/2}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 & 17 \end{bmatrix} \sim_{L_3 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\sim_{L_3 \cdot 1/5} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim_{\substack{L_1 - 7L_3 \\ L_2 - 3L_3}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim^{L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercice 12

Soit x, y, z des inconnues. On considère le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x + \cos y + 2\cos z &= 3 \\ 2\cos x - 2\sqrt{2}\cos y + 2\cos z &= 1 - \sqrt{2} \\ \cos x + \cos y - \sqrt{2}\cos z &= 1 \end{cases}$$

En posant $X = \cos x$, $Y = \cos y$ et $Z = \cos z$, et en substituant dans le système original, on obtient un système d'équations linéaires aux inconnues X, Y et Z. Utiliser l'algorithme de Gauss pour résoudre ce système et ensuite en déduire les valeurs de x, y et z dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ qui satisfont au système initial.

Sol.: On écrit la matrice augmentée du système, où l'on a échangé les première et dernière lignes :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 2 & -2\sqrt{2} & 2 & 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\text{L3}\to\text{L3}+(-\sqrt{2})\cdot\text{L1}}{\overset{\text{L2}\to\text{L2}+(-1)\cdot\text{L1}}{\sim}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -2-2\sqrt{2} & 2+2\sqrt{2} & -1-\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{array}\right) \overset{\text{L2}\to\text{L2}+(-2)\cdot\text{L3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & -4 & -6+2\sqrt{2} & -7+\sqrt{2} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{array}\right) \overset{\text{L2}\to\text{L2}\cdot\frac{-1}{4}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 1-\sqrt{2} & 4 & 3-\sqrt{2} \end{array}\right)$$

$$\overset{\text{L3}\to\text{L3}+\text{L3}\cdot(\sqrt{2}-1)}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{7}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & 2\sqrt{2}+\frac{3}{2} & \sqrt{2}+\frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow Z = \frac{1}{2}, Y = 1, X = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Au final, on trouve $x = \frac{\pi}{4}, y = 0$ et $z = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 13

Pour chacun des systèmes suivants

1. $\begin{cases} x + y + 2z + 3w &= 13 \\ x - 2y + z + w &= 8 \\ 3x + y + z - w &= 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x + y + z - 2w &= 1 \\ 3x - 2y + z - 6w &= -2 \\ x + y - z - w &= -1 \\ 6x + z - 9w &= -2 \\ 5x - y + 2z - 8w &= 3 \end{cases}$

a) Écrire la matrice augmentée correspondante (pour l'ordre des inconnues x, y, z, w).
b) Mettre cette matrice sous forme échelonnée réduite.
c) Déterminer la solution générale du système.

Sol.: Les matrices augmentées sont

1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 13 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & -6 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 & -9 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & -8 & 3 \end{bmatrix}$

et les matrices sous forme échelonnée réduite correspondantes sont

$$1) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \qquad 2) \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -17/11 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3/11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour le premier système, w est une variable libre et la solution est donnée par : $x = -2 + w$, $y = -1$ et $z = 8 - 2w$. Sous forme vectorielle on écrira donc

$$S = \{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid w \in \mathbb{R} \}$$

C'est une droite dans $\mathbb{R}^4$. Le deuxième système n'est pas consistant et donc n'admet pas de solution.

Exercice 14

Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 18 \\ x + 2y + z = 13 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

- ☐ $z = 2$
- ☐ $z = 3$
- ☐ $z = 4$
- ☐ $z = 5$

Sol.: $z = 5$

Exercice 15

Lors de l'échelonnement de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

la colonne qui ne possède pas de pivot est la

- ☐ première
- ☐ deuxième
- ☐ troisième
- ☐ quatrième

Sol.: La troisième.

Exercice 16

Soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nous avons

☐ $r_{14} = 6$ ☐ $r_{14} = 5$ ☐ $r_{14} = 3$ ☐ $r_{14} = 2$

Sol.: $r_{14} = 5$

Exercice 17

a) Pour quelle valeur de h la matrice suivante est-elle la matrices augmentée d'un système linéaire compatible (consistant) :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

- ☐ $h = 5$,
- ☐ $h = 5/2$,
- ☐ $h \neq 5/2$,
- ☐ $h = -5/2$.

b) Même question pour la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right).$$

- ☐ $h = 2$,
- ☐ $h = -2$,
- ☐ $h \neq 2$,
- ☐ $h \neq -2$.

Sol.:

a) On a l'équivalence

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ -2 & 6 & -5 \end{array}\right) \sim_{L_2+2L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & h \\ 0 & 0 & 2h-5 \end{array}\right).$$

Le système linéaire correspondant à cette matrice est :

$$\begin{aligned} x - 3y &= h \\ 0 &= 2h - 5, \end{aligned}$$

il est consistant si et seulement si $2h - 5 = 0$, c'est-à-dire si $h = 5/2$.

b) On a l'équivalence :

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{array}\right) \sim_{-L_2+3L_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & h & 4 \\ 0 & 3h-6 & 4 \end{array}\right).$$

Le système linéaire correspondant à la dernière matrice est

$$\begin{aligned} x + hy &= 4 \\ (3h-6)y &= 4\,. \end{aligned}$$

Il est consistant si et seulement si $3h - 6 \neq 0$, c'est à dire si $h \neq 2$.